

微積分 試題

(限用答案本作答)

1. 試判斷下列各敘述是正確抑或錯誤 (10%)

(1) 函數 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ 之圖形有一條斜漸近線 $y = |x|$.

(2) 若函數 f 在 x_0 為連續且 $\lim_{x \rightarrow x_0} |f'(x)| = \infty$, 則 f 的圖形在 x_0 處有一條垂直漸近線.

(3) 若函數 f 與 g 在 $[a, b]$ 為可積分, 則 $\int_a^b (f(x)g(x)) dx = \left(\int_a^b f(x) dx\right) \left(\int_a^b g(x) dx\right)$.

(4) $\int_a^b \int_a^b f(x)f(y) dy dx = \left(\int_a^b f(x) dx\right)^2 = \left(\int_a^b f(y) dy\right)^2$.

(5) 若 $f_x(x_0, y_0) = 0$ 且 $f_y(x_0, y_0) = 0$, 則函數 $f(x, y)$ 在點 (x_0, y_0) 必有極值存在.

2. 試求下列之極限 (30%)

(1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x} - 1}{\sqrt{3-2x} - 1}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin x}$ (不准使用 L'Hospital's Rule)

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1), a > 0$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\sin \left(\frac{\pi i}{n} \right) \right] \frac{\pi}{n}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \int_2^x \frac{\cos t}{t} dt}{x-2}$

(6) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$

3. 老師在課堂上出一題隨堂練習 $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = ?$ 給同學們演算, 大部分同學之演算方法如下:

$$\text{因爲 } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = \left(\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x^2} \right)$$

$$\text{又因爲 } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \text{ 故 } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x^2} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x^2} = 0$$

你認為同學們上述之做法是正確抑或錯誤, 請說明原因, 如果你認為做法錯誤, 請你寫出正確的做法. (10%)

4. 若 $x > 0$, 試利用均值定理, 證明 $\frac{x}{1+x^2} < \tan^{-1} x < x$. (10%)

本試題係兩面印刷

5. 若 $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$, 試求

(1) $(f^{-1})'(2) = ?$ (5%)

(2) $\int_2^3 f^{-1}(x) dx = ?$ (5%)

6. 若 $f(x, y) = \int_{\tan^{-1}x}^{\sin y} te^{t^2} dt + \int_{\tan^{-1}y}^{\cos x} (t-1)e^{\sqrt{t}} dt$, 試求 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 與 $\frac{\partial f}{\partial y}$. (10%)

7. 試求函數 $f(x, y, z) = \ln(x^2+y^2-1) + y + 6z$ 在點 $(1, 1, 0)$ 上遞增與遞減最快的方向, 並求函數在這些方向的方向導數. (10%)

8. 試求 $\int_2^{\infty} \int_0^2 \frac{1}{(x^2-x)(y+1)^{2/3}} dy dx$ 之值. (10%)

本試題係兩面印刷

試題完