

一、求下列各小題。(每小題六分)

$$1. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{(2+h)^2 + 1} - \sqrt{5}}{h}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 2| - 1}{x - 1}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^2 + 2 \right]$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \right)$$

$$5. \int_0^2 \int_{\frac{1}{2}}^2 e^{y^2} dy dx$$

二、試證明方程式 $x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0$ 在 0 與 1 之間有一根，且說明如何利用數值法求此根的近似值。(十分)

三、若 $f(x) = x^5 + x^3 + 2x$ ，證明反函數 f^{-1} 存在且求 $(f^{-1})'(4)$ 。(十分)

四、假設生產函數為 $f(x, y) = 100x^{0.75}y^{0.25}$ ， x 表示勞力單位， y 表示資本單位。若勞力與資本的每單位成本分別為 200 元與 300 元，且現有總投資額為 6 萬元，欲得最大生產量勞力與資本應各為多少。(十分)

五、求曲線 $y = x^3 - x^2 - 6x$ 與 x 軸所包圍的區域面積。(十分)

六、假設某細菌數量的變化率與其數量成正比，若現有細菌的數量為 4 萬且 2 小時後為 6 萬，求 4 小時後細菌的數量。(十分)

七、求 $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (4-x^2-y^2)^{1/2} dy dx$ 。(十分)

八、已知隨機變數 X 的機率密度函數為 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ ，且隨機變數 X 大於 1 的機率值為 $P(X > 1) = 0.1587$ ，試求機率值 $P(-1 \leq X \leq 1)$ 。(十分)