銘傳大學九十學年度轉學生招生考試

七月二十九日　第四節

企、國、會、風、財、統、經、資科 轉二

微積分　試題

一、選擇題(單選)　80%

下列各題共有 5 個備選項但僅有一個選項是正確的，請你將正確的選項依各題號之順序寫在試券上(不依題號順序不予計分)。

1. 下列的選項哪一個是正確的

   (1) 若 $f: IR \longrightarrow IR$ 定義為 $f(x) = x^2 - 1$, 則 $D_f = IR$, $R_f = IR$
   (D_f 表函數 f 的定義域, R_f 表函數 f 的值域)

   (2) $y = f(u) = \ln u$, $u \in D_1 = (0, \infty)$, $u = g(x) = -x^2 - 1$, $x \in D_2 = (-\infty, \infty)$可以進行合成，即 $y = f(g(x))$有意義。

   (3) 若 f 為偶函數，則 f 必具有反函數

   (4) 若 f 為單調函數，則 f 必具有反函數

   (5) $y = cos\ x$ 之反函數為 $y = cos^{-1}x$

2. 若 $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$，則 a 與 b 之值應為

   (1)$a = 4, b = 1$　(2)$a = 1, b = 4$　(3)$a = 5, b = 2$　(4)$a = 3, b = 1$　(5)$a = b = 4$

3. 若函數 f(x)= $\begin{cases} x^3, 若 x \le 1 \\ x^2 + ax - 1, 若 x > 1 \end{cases}$ 在 x = 1 可以微分，則 a 之值為。

   (1) 1　(2) 0　(3) -1　(4) 1/2　(5) 以上皆非

4. 若 f(x)= $\frac{x(1+x)(2+x)...(n+x)}{(1-x)(2-x)...(n-x)}$，則 $f'(0)$ =?

   (1) 不存在　(2) 1　(3) 0　(4) -1　(5) 1/2

5. 下列的極限哪一個不存在

   (1) $\lim_{t \to 0^+}(\ln \sin t - \ln t)$　(2) $\lim_{x \to \infty} x(e^{\frac{1}{e}} - 1)$　(3) $\lim_{t \to \infty} \int_t^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{1-\cos x} dx$

   (4) $\lim_{n \to \infty} \sum_{n=1}^{n} \frac{1}{n+k}$　(5) 以上皆不存在

6. 直線 $x = 2$ 為下列哪一個函數圖形之垂直漸進線

   (1) $f(x)=(x^2 + 2x - 8) / (x^2 - 4)$　(2) $f(x) = x / (\sqrt{x} - 2)$　(3) $f(x) = \ln|x|$

   (4) $f(x)=(x^2 / 2) - \ln x$　(5) $f(x) = \ln|x - 2|$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin^{-1}(\frac{1+\ln^2 x}{1-\ln^2 x}) = ?$

(1) 0 (2) π/4 (3) –(π/6) (4) –(π/2) (5) π/2

8. $\int_1^3 [-x]dx = ?$ ([ ]表高斯函數)

(1) 5 (2) -3 (3) -5 (4) -2 (5) -4

9. 下列的敘述哪一個是正確的

(1) 若函數 f 在 $[a,b]$ 為可積分，則 f 必連續

(2) 函數 f 在 $[a,b]$ 連續是 $\int_a^b f(x)dx$ 存在之充分條件

(3) $f(x) = \begin{cases} 1, 當x爲有理數 \\ -1, 當x爲無理數 \end{cases}$ 在 $[0,1]$ 上是可以積分

(4) $\int_0^6 \ln x dx$ 不存在

(5) 若函數 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可以積分，則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一定可以積分

10. 下列哪一個極限不存在

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-2xy+5y^2}{3x^2+4y^2}$ (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ (4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{5x^2 y}{x^2+y^2}$

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \tan^{-1}(\frac{x^2+2xy-y^2}{x^2+y^2+2})$

11. 曲面 $z = 9 - x^2 - y^2$ 在點(1,2,4)之切平面與 xy 座標平面的交界線為

(1) 2x+4y=14 (2) 2x+4y+z=14 (3) $\begin{cases} 2x+z=6 \\ y=2 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} z+4y=12 \\ x=1 \end{cases}$

(5) 以上皆非

12. 函數 $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + y + 6z$ 在點(1,1,0)上遞增最快的方向為

(1) $\vec{u} = -\frac{2}{7}\vec{i} - \frac{3}{7}\vec{j} - \frac{6}{7}\vec{k}$ (2) $\vec{u} = \frac{2}{7}\vec{i} + \frac{3}{7}\vec{j} + \frac{6}{7}\vec{k}$ (3) $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$

(4) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 6\vec{k}$ (5) $\vec{u} = -2\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$

13. 疊積分 $\int_0^{\sqrt{\ln 2}} \int_0^1 \frac{xye^{x^2}}{1+y^2} dydx$ 之值為

(1) 1/4 (2) ln 3 (3) 1/4(ln 2) (4) $\sqrt{\ln 2}$ (5) 以上皆非

14. 疊積分 $\int_0^3 \int_{y^2}^8 y\cos x^2 dxdy$ 之值為

(1) (2/9)[$(2)^{2/3}$+1] (2) (1/4)cos 81 (3) cos 81 (4) (1/4)sin 81

(5) (1/4)sin 9

15. 下列的級數何者收斂

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n})^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{n\pi}{2})}{n}$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\tan\frac{1}{n}$ (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n}{n^4}$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tan^{-1}n}{1+n^2}$

16. 若 $f: IR^2 \to IR$ 定義為 $f(x, y, z) = x^{y^z}$, $x>0$, $y>0$, $z>0$, 則 $f_z(1,1,1)$ =?

(1) 不存在 (2) -1 (3) 2 (4) $(\ln 2)^2$ (5) 0

17. 設 $f: IR^2 \to IR$ 定義為 $f(x, y)=\begin{cases}\frac{3xy}{x^2+y^2}, \acute{a}c\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, \acute{a}c\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$, 則列敘述何者為正確

(1) $f_x(0,0)$不存在

(2) $f(x, y)$在(0, 0)連續

(3) $f(x, y)$在(0, 0)連續且可微分

(4) $f(x, y)$在(0, 0)不連續且不可微分

(5) $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 故 $f(x, y)$在(0, 0)可以微分

18. $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\sqrt{1+y^3dydx}=?$

(1) $\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+y^3}dxdy$ (2) $\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=\sqrt{y}}\sqrt{1+y^3}dxdy$ (3) $\int_{y=0}^{y=1}\int_{x=0}^{x=y^2}\sqrt{1+y^3}dxdy$

(4) $\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}}\int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+y^3}dxdy$ (5) $\int_0^1\int_0^1\sqrt{1+y^3}dxdy-\int_{y=0}^{y=\sqrt{x}}\int_{x=0}^{x=1}\sqrt{1+y^3}dxdy$

19. 若 $u=f(x, y)$且 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 則下列何式成立?

(1) $(\frac{\partial u}{\partial r})^2+(\frac{\partial u}{\partial\theta})^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$ (2) $(\frac{\partial u}{\partial r})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial u}{\partial\theta})^2=(\frac{\partial u}{\partial x})^2+(\frac{\partial u}{\partial y})^2$

(3) $(\frac{\partial u}{\partial r})+\frac{1}{r}(\frac{\partial u}{\partial\theta})=(\frac{\partial u}{\partial x})+(\frac{\partial u}{\partial y})$ (4) $(\frac{\partial u}{\partial x})^2+\frac{1}{r^2}(\frac{\partial u}{\partial y})^2=(\frac{\partial u}{\partial r})^2+(\frac{\partial u}{\partial\theta})^2$

(5) 以上皆非

20. 下列之敘述何者正確

(1) $\int_a^b\int_a^b f(x)f(y)dydx=\left[\int_a^b f(x)dx\right]^2=\left[\int_a^b f(y)dy\right]^2$

(2) $\int_0^1\int_0^x f(x,y)dydx=\int_0^1\int_0^y f(x,y)dxdy$

(3) $\int_0^1\int_0^{y^2}2ye^x dxdy=\int_0^{y^2}\int_0^1 2ye^x dydx$

(4) $\int_0^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(xyz)dxdydz = (\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin xdx)(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin ydy)(\int_0^{\pi} \sin zdz)$

(5) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy = \int_0^1 \int_0^{3x} e^{x^2} dydx$

二、計算題 (20 分)

1. 若 $\sin x$ - $\sqrt{}3 \cos x)dy - dx = 0$, 求 $y = ?$ (8%)
2. 設某城鎮於西元 1970 年 1 月的人口數為 200 萬，並假設人口的成長率與當時的人口數成正比，亦即比例常數為每年 0.01。試問該城鎮的人口數何時會超過 300 萬？ (6%)
   已知 $\ln(3/2) \cong 0.405$
3. 試利用比較檢驗法判斷 $\int_1^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ 的斂散性。 (6%)

試題完