

# 銘傳大學 98 學年度研究所碩士班招生考試

## 應用統計資訊學系碩士班

### 第三節

#### 線性代數試題

(第 1 頁共 1 頁) (限用答案本作答)

可使用計算機  不可使用計算機

注意事項: (a) 每題十分

(b)  $R^n$  表示  $n$  維空間;  $X \in R^n$  即  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$  表示  $(x_1, \dots, x_n)$  的轉置矩陣

1. 某運輸公司有甲、乙兩部卡車，甲卡車每次裝運蔬菜 2 噸與肉類 1 噸，乙卡車每次裝運蔬菜與肉類各 1 噸，今有蔬菜 20 噸、肉類 15 噸，且甲、乙卡車各裝運  $a$  次與  $b$  次，請將這些資料寫成矩陣方程式，並求  $a$  與  $b$  之值。
2. 若  $L$  是  $R^3$  映至  $R^2$  的線性變換，且  $L(X) = (x_1 + x_2, x_1 + x_3)^T$ ,  $X \in R^3$ ，求矩陣  $A$  使得  $L(X) = AX$ 。
3. 若矩陣  $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$ ， $A^0$  表示單位矩陣，求  $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 。
4. 已知  $U = (-1, 1)^T$ 、 $V = (3, 5)^T$ ，請說明  $U$  與  $V$  是線性獨立，並利用 Gram-Schmidt 過程求其規格化正交基底(orthonormal basis)。
5. 若  $f(x_1, x_2) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2$ ，求對稱矩陣  $A$  使得  $(x_1, x_2)A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2)$ 。
6. 若  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ，求矩陣  $A$  的特徵值  $\lambda$ ，特徵向量  $x_0$ ，及求  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n x_0$ 。
7. 若  $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ，請說明矩陣  $A$  是否為正定矩陣(positive definite matrix)。
8. 若  $u_1, u_2, u_3$  是  $R^3$  規格化正交基底，且  $U = u_1 - 2u_2 + 3u_3$ 、 $V = 3u_1 + 2u_2 + u_3$ ，求  $U$  與  $V$  的內積(inner product)  $U \bullet V$ 。
9. 若  $e^A = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ ， $I$  是單位矩陣，求  $e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$ 。
10. 某大都會區的人口不變，其中郊區人口佔 70%，但是每年郊區有 2% 人口搬到市區，市區有 6% 人口搬到郊區，求最後郊區與市區人口各佔多少百分比。

試題完