

微積分 試題

(限用答案本作答)

1. 試問函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^3-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 是否連續？請說明理由。

由。若不連續，如何使函數 $f(x)$ 變為連續。(十分)

2. 若 XY 平面上某曲線通過點 $(0,3)$ 且其切線斜率滿足方程式

$$y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1), \text{ 求此曲線的方程式。 (十分)}$$

3. 試問函數 $f(x) = 3x + 2\cos x$ 的反函數是否存在？請說明理由。

由。如果反函數存在，求 $(f^{-1})'(2)$ 。(十分)

4. 求切曲線 $x^3 + y^3 = 2xy$ 於點 $(1,1)$ 的切線方程式。(十分)

5. 求曲面 $z^2 = xy + 1$ 與原點距離最近的點座標。(十分)

6. 求三度空間中的曲面 $z = e^{x^2+y^2}$ ，圓柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 與平面 $z = 0$

所包圍的體積。(十分)

7. 求下列各小題；(每小題五分)

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{x^{-1}}$ (b) $D_x^n \left(\frac{1}{1-x} \right)$ (c) $D_x \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$

(d) $D_x x^{\sin x}$ (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^4}{n^5}$ (f) $\int_{-2}^2 \sin^5 x dx$

(g) $\int_{-2}^1 (x+1)^{-2} dx$ (h) $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx$