

機率論 試題

(限用答案本作答)

1. X 與 Y 的聯合機率密度函數 (joint $p.d.f.$) 如下:

$$f_{XY}(x, y) = 8xy, \quad 0 \leq x < y \leq 1.$$

求 $Cov(X, Y)$ 。(10%)

2. X_1 與 X_2 為兩個獨立的隨機變數 ($r.v.$), 其分配為 Gamma 分配 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 。

a. 利用動差母函數 ($m.g.f.$) 求 $X_1 + X_2$ 的分配。(10%)

b. 假設 $\alpha > 1$, 令 $Y = \frac{1}{X_1 X_2} + e^{2X_1 + X_2}$, 求 $E(Y)$? (10%)

(Hint: $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$, $M_X(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha}$, $p.d.f.$ $f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$, $0 < x < \infty$.)

3. 假設 X 的動差母函數 ($m.g.f.$) 如下:

$$M_X(t) = \left[e^{2\lambda(e^t-1)+t} \right]^5.$$

a. 求 $E(X)$ 與 $Var(X)$. (10%)

b. 試說明 X 的機率分配為何? (10%)

4. 假設隨機變數 X 的機率密度函數 ($p.d.f.$) 如下:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-2} e^{-\frac{1}{2x^2}}.$$

令 $Y = \frac{1}{X}$, 求 Y 的分配為何? (10%)

5. 假設兩獨立隨機變數 X_1, X_2 服從一幾何分配, 其機率函數如下:

$$f_X(x) = (1-p)^x p, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

a. 求 X 的機率分配之中位數。(10%)

b. 令 $W = \min(X_1, X_2)$, 求 W 的機率分配為何? (10%)

6. 假設隨機變數 $X \sim U(0, 1)$, 即其 $p.d.f.$ $f_X(x) = 1, 0 < x < 1$, 假設給定 $X = x$ 下, Y 的條件機率分配 (conditional $p.d.f.$) 為二項式分配 (binomial distribution) 如下:

$$P(Y = y | X = x) = \binom{n}{y} x^y (1-x)^{n-y}, \quad y = 0, 1, \dots, n.$$

a. 求 $E(Y)$ 。(10%)

b. 求 Y 的邊際機率分配 (marginal $p.d.f.$)。(10%)