

管理科學(乙組)
銘傳大學八十九學年度金融研究所碩士班招生考試

第一節

微積分 試題

1. 若 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x, x > 0$, 試求 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$, $f(x)$ 圖形之垂直漸進現為何?

(4%)

2. (1) 試求 $f(x) = \sqrt{2x-3}$ 之反函數 $f^{-1}(x)$, 並將 $f(x)$ 與 $f^{-1}(x)$ 之圖形繪於同一座標平面上。

(2) 試證明 $f(f^{-1}(x)) = x, \forall x \geq 0, f^{-1}(f(x)) = x, \forall x \geq \frac{3}{2}$ 。

(3) 試求 $f^{-1}(x)$ 圖形上點 $(\sqrt{3}, 3)$ 之切線方程式。

(4) 自 $f(x)$ 圖形上一點 $(3, \sqrt{3})$ 與 $f^{-1}(x)$ 圖形上一點 $(\sqrt{3}, 3)$ 分別向 x -軸與 y -軸作垂直線其與座標軸所圍成封閉區域之面積分別為 A_1 及 A_2 , 試證明 $A_1 = A_2$ 。(16%)

3. (1) 令 $f(t) = \begin{cases} t^2 \cos(\frac{1}{t}), & \text{若 } t \neq 0 \\ 0, & \text{若 } t = 0 \end{cases}$, 下列有關 $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$ 之計算過程你認為是

正確抑或錯誤如果你認為是錯誤的話, 請說明錯誤的理由, 並改以正確的方法求 $f(t)$ 。

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \cos\left(\frac{1}{t}\right) = (\lim_{t \rightarrow 0} t^2)(\lim_{t \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{t}\right)) = 0$$

- (2) 試求 $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 \cos(\frac{1}{t})}{\sin^2 t}$ 之值。(請附計算過程) (10%)

4. 試利用圓柱殼層法(Method of cylindrical shells)證明一底半徑為 r 且高為 h 之正圓錐體之體積為 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ 。(8%)

5. 下列有三個積分, 判斷哪一個是定積分, 哪一個是假積分(Improper integral)並說明理由。

$$(1) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x}{x} dx$$

$$(3) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{x} dx \quad (9\%)$$

6. 試求下列積分

$$(1) \int_1^2 \sqrt{1+2x-x^2} dx$$

$$(2) \int_0^a \frac{e^x}{e^x + e^{a+x}} dx (a > 0)$$

$$(3) \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

$$(4) \int_{-1}^1 \ln|x| dx \quad (16\%)$$

7. 若函數 $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{若 } x \leq 1 \\ x^2 + ax + b, & \text{若 } x > 1 \end{cases}$ 在點 $x=1$ 處可微分，試求 a 與 b 之值。

(5%)

8. (1) 試繪 $f(x) = \begin{cases} \frac{[x]}{2}, & \text{若 } 0 \leq x < 5 \\ \sqrt{x-1}, & \text{若 } x \geq 5 \end{cases}$ 之圖形， $[x]$ 表高斯符號。

(2) 證明 $f(x)$ 於 $x=3$ 處不連續。

(3) $\int_0^6 f(x) dx$ 是否存在，若存在則求其值

(4) 函數 $f(x)$ 在閉區間中連續，試定積分存在之充分條件還是必要條件。(16%)

9. 試證明函數 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}, & \text{若 } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{若 } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在點 $(0, 0)$ 不連續。

(6%)

10. 試求曲面 $\cos \pi x - x^2 y + e^{xz} + yz = 4$ 上點 $(0, 1, 2)$ 之切平面方程式與法線方程式。(5%)

11. 是變換積分的順序 $\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4 \cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz$ 之值。(5%)

試題完